

Accesul la informații și soluții de calcul matriceal, probleme în care sunt implicate variabile necunoscute și rezolvarea acestor probleme prin mijloacele matematice.

rezolvându-le astfel

vectorii proprii și valoarea proprie a unei matrici și
rutele într-unul din cele două moduri:

matricea să fie redusă la forma echivalentă

matricea să fie redusă la forma canonică și să se rezolve în două capitol. *Cazuri speciale* și *Cazuri generale* și mijloacele folosite de soluții aproape

PROBLEME DE CALCUL MATRICEAL

OLIMPIADE, CONCURSURI ȘCOLARE

ȘI BACALAUREAT

În cadrul unei olimpiade matematice

într-un concurs școlar sau chiar la Bacalaureat

într-o problemă clasică, să se rezolve următoarele

probleme de următoare:

De exemplu, să se rezolve problema următoare: „Un cerc, cu diametru egale cu latura triunghiului ABC, este inscris în el. Dacă unghiul A este de 60° , să se calculeze perimetrul triunghiului ABC.”

Într-o olimpiadă matematică, să se rezolve următoarea problemă: „Se preștează pentru olimpiadei matematice o clasă de elevi care să rezolve la facilitate, stămînd cunoștințele lor de bază, nu vor fi multe să se întrevin pe aceștiă. Mă și exercită să rezolvă ”căciuțele” să fie deosebit de ușoare.”

Într-o olimpiadă matematică, să se rezolve următoarea problemă: „Se prezentă lecțiile de la clasă sau paralelă cu ajutorul unor mijloace de informație din centrele de excelență.”

Într-o olimpiadă matematică, să se rezolve următoarea problemă: „Se prezentă lecțiile de la clasă sau paralelă cu ajutorul unor mijloace de informație din centrele de excelență.”



Cartea Românească
EDUCATIONAL

Autorul

Cuprins

Argument	5
Breviar teoretic.....	7

ENUNȚURI

Capitolul A. Cazuri particulare.....	11
A.I. $n = 2$	11
Probleme rezolvate	11
Probleme propuse	23
A.II. $n \geq 3$	45
Teste de evaluare	55
Capitolul B. Cazul general	59
Probleme rezolvate	59
Probleme propuse	70
Teste de evaluare	95

SOLUȚII. INDICAȚII. RĂSPUNSURI

Capitolul A. Cazuri particulare.....	99
S.A.I. $n = 2$	99
S.A.II. $n \geq 3$	147
Teste de evaluare	169
Capitolul B. Cazul general	173
Teste de evaluare	226
<i>Bibliografie</i>	230

- [1] Pop Vasile, *Matematică. Probleme și determinante. Pentru clasele 9-10*, Editura Didact. 2010.
- [2] Pop Vasile, *Răspunsuri la probleme și determinante. Pentru clasele 9-10*, Editura N. Iustin, Cluj-Napoca, 2007.
- [3] Pop Vasile, Lupașor V., *Măsurarea în Datorie Gh. Iosan C., Leontiu G.*, *Matematică. Probleme și răspunsuri de performanță, clasa a XI-a*, Editura Didact. și Pedagogică, Cluj-Napoca, 2003.

Capitolul A. Cazuri particulare

A.I. $n = 2$

Probleme rezolvate

R.A.1. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Determinați matricele $X \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât:

$$X^n + X^{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Laurențiu Panaitopol

Soluție. Din enunț avem că $\det X^{n-2} \cdot \det(X^2 + I_2) = 0$, de unde $\det X = 0$ sau $\det(X^2 + I_n) = 0$. Dacă $\det(X^2 + I_n) = 0$, atunci:

$$\begin{aligned} \det(X + iI_2) \cdot \det(X - iI_2) &= 0 \Rightarrow (\det X + i\operatorname{Tr} X - 1)(\det X - i\operatorname{Tr} X - 1) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\det X - 1)^2 + (\operatorname{Tr} X)^2 = 0 \Rightarrow \det X = 1 \text{ și } \operatorname{Tr} X = 0 \Rightarrow X^2 + I_2 = O_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow X^n + X^{n-2} = O_2, \text{ contradicție. Astfel, } \det X = 0, \text{ ceea ce implică, inductiv,} \\ &\text{că } X^k = (\operatorname{Tr} X)^{k-1} X, (\forall) k \in \mathbb{N}^*. \text{ De aici:} \end{aligned}$$

$$\left[(\operatorname{Tr} X)^{n-1} + (\operatorname{Tr} X)^{n-3} \right] X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (\operatorname{Tr} X)^n + (\operatorname{Tr} X)^{n-2} = 2.$$

Pentru n impar, ultima ecuație are soluția unică $\operatorname{Tr} X = 1$, ceea ce implică $X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Pentru n par, obținem $\operatorname{Tr} X \in \{-1, 1\}$, ceea ce implică $X = \pm \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

R.A.2. Considerăm mulțimea de matrice $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Arătați că, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, mulțimea M conține exact două submulțimi H cu n elemente stabile.

Marcel Tena

Soluție. Se observă că, dacă $XY = O_2$, $X, Y \in M$, atunci $X = O_2$ sau $Y = O_2$.
Respect pentru oameni și cărți

De asemenea, $XY = YX$, $(\forall) X, Y \in M$. Presupunem că $O_2 \notin H$.

Fie $H = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. Dacă $X \in H$, atunci $XX_1XX_2\dots XX_n = X_1X_2\dots X_n$, de unde rezultă $(X^n - I_2)X_1X_2\dots X_n = O_2$, deci $X^n = I_2$. Este clar că $\det X = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 1. \text{ Punem } a = \cos t, b = \sin t, t \in [0, 2\pi) \Rightarrow X^n = \begin{pmatrix} \cos nt & \sin nt \\ -\sin nt & \cos nt \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow t = \frac{2k\pi}{n}, k = \overline{0, n-1} \Rightarrow H = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t_k & \sin t_k \\ -\sin t_k & \cos t_k \end{pmatrix} \middle| t_k = \frac{2k\pi}{n}, k = \overline{0, n-1} \right\}.$$

Dacă $O_2 \in H$, atunci $H' = H \setminus \{O_2\}$ verifică primul caz, iar

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t_k & \sin t_k \\ -\sin t_k & \cos t_k \end{pmatrix} \middle| t_k = \frac{2k\pi}{n-1}, k = \overline{0, n-2} \right\} \cup \{O_2\}.$$

R.A.3. Dacă $X \in M_2(\mathbb{C})$ este o matrice, atunci $\det X = \frac{(TrX)^2 - TrX^2}{2}$.

Soluție. Din teorema Hamilton-Cayley, $X^2 - TrX \cdot X + \det X = O_2$, aplicând urma, obținem:

$$TrX^2 - (TrX)^2 + 2\det X = 0 \Rightarrow \det X = \frac{(TrX)^2 - TrX^2}{2}.$$

R.A.4. Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ sunt două matrice și $x \in \mathbb{C}$, atunci avem egalitatea:

$$\det(A + xB) = \det A + (TrA \cdot TrB - Tr(AB)) \cdot x + \det B \cdot x^2.$$

Soluție. Luând $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, obținem:

$$\det(A + xB) = \begin{vmatrix} a + xe & b + xf \\ c + xg & d + xh \end{vmatrix} = x^2(eh - gf) + x(ed + ah - bg - cf) + ad - bc = \\ = x^2 \det B + x(TrA \cdot TrB - Tr(AB)) + \det A.$$

Consecință 1. Pentru $x = 1$, obținem că:

$$\det(A + B) = \det A + \det B + Tr(A) \cdot Tr(B) - Tr(AB),$$

$$\text{astfel } \det(A + B) = \det A + \det B \Leftrightarrow Tr(A) \cdot Tr(B) = Tr(AB).$$

Consecință 2. Pentru $x \in \{-1, 1\}$, avem că:

$$\det(A+B) - \det(A-B) = 2[TrA \cdot TrB - Tr(AB)],$$

deci $\det(A+B) = \det(A-B) \Leftrightarrow TrA \cdot TrB = Tr(AB)$.

R.A.5. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AB + BA = O_2$ și $\det(A+B) = 0$. Arătați că $TrA = TrB = 0$.

G.M.B.

Soluție. Avem $(A-B)^2 = A^2 + B^2 = (A+B)^2$, de unde $\det(A-B) = 0$.

Cum $AB + BA = O_2$, rezultă că $Tr(AB) = 0$. Relațiile $\det(A-B) = 0 = \det(A+B)$ implică $Tr(AB) = TrA \cdot TrB = 0$ și $\det(A+B) = \det A + \det B = 0$.

Presupunem că $TrA = 0$. Din teorema Hamilton-Cayley rezultă:

$$(A+B)^2 - Tr(A+B)(A+B) = O_2 \Rightarrow Tr(A+B) = 0 \Rightarrow TrB = 0.$$

R.A.6. Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{R})$, iar $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ este o rădăcina de ordinul trei a unității, atunci $|\det(A + \varepsilon B)|^2 = \det(A^2 + B^2 - BA) - \det(AB - BA)$.

Florin Stănescu, G.M.-B

Soluție. Folosind $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, $\varepsilon \cdot \bar{\varepsilon} = 1$, $\varepsilon + \bar{\varepsilon} = 0$, $\frac{1}{\varepsilon^2} = \varepsilon$, putem scrie:

$$\begin{aligned} |\det(A + \varepsilon B)|^2 &= \det(A + \varepsilon B) \cdot \det(A + \bar{\varepsilon} B) = \det(A^2 + B^2 + \varepsilon BA + \bar{\varepsilon} AB) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \det(\varepsilon(A^2 + B^2) - (1 + \varepsilon)BA + AB) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\det(\varepsilon(A^2 + B^2 - BA) + AB - BA) \right) = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} [\det(AB - BA) + \varepsilon^2 \det(A^2 + B^2 - BA) + \\ &+ \varepsilon \left(Tr(A^2 + B^2 - BA) \cdot Tr(AB - BA) - Tr[(A^2 + B^2 - BA)(AB - BA)] \right)] = \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} [\det(AB - BA) - \varepsilon \left(Tr(A^3 B - A^2 BA + B^2 AB - B^3 A - BA^2 B + (BA)^2) \right)] + \\ &+ \varepsilon^2 \det(A^2 + B^2 - BA) = \\ &= \varepsilon \left(\det(AB - BA) + \varepsilon Tr(A^2 B^2 - (AB)^2) + \varepsilon^2 \det(A^2 + B^2 - BA) \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \varepsilon \det(AB - BA) + \varepsilon^2 \operatorname{Tr}(A^2 B^2 - (AB)^2) + \varepsilon^2 \det(A^2 + B^2 - BA) = \\
 &= \varepsilon \det(AB - BA) + \varepsilon^2 \det(AB - BA) + \det(A^2 + B^2 - BA) = \\
 &= \det(AB - BA)(\varepsilon + \varepsilon^2) + \det(A^2 + B^2 - BA) = \det(A^2 + B^2 - BA) - \det(AB - BA).
 \end{aligned}$$

Este evident că și $|\det(B + \varepsilon A)|^2 = \det(A^2 + B^2 - AB) - \det(AB - BA)$.

R.A.7. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2 + B^2 = 2AB$.

- a) Arătați că $AB = BA$.
- b) Arătați că $\operatorname{Tr}A = \operatorname{Tr}B$.

Marian Ionescu

Soluție. Vom face demonstrația pentru $A, B \in M_2(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad &\text{Din enunț, avem: } A^2 + B^2 - 2AB = O_2 \Rightarrow 0 = \det(A^2 + B^2 - 2AB) = \\
 &= \det(A^2 + B^2 - AB - BA - (AB - BA)) = \det(A^2 + B^2 - AB - BA) + \\
 &+ \det(AB - BA) - \operatorname{tr}(A^2 + B^2 - AB - BA) \cdot \operatorname{tr}(AB - BA) + \\
 &+ \operatorname{tr}[(AB - BA)(A^2 + B^2 - AB - BA)] = \det(A - B)^2 + \det(AB - BA), \text{ deoarece} \\
 &\operatorname{tr}[(AB - BA)(A^2 + B^2 + AB + BA)] = 0. \text{ Tot din enunț obținem că:} \\
 &A^2 + B^2 - AB - BA = AB - BA \Rightarrow (A - B)^2 = AB - BA \Rightarrow \det(A - B)^2 = \\
 &= \det(AB - BA), \text{ iar din } 0 = \det(A + B)^2 + \det(AB - BA) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 0 = 2\det(AB - BA) \Rightarrow \det(AB - BA) = 0 \Rightarrow (AB - BA)^2 = O_2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Cum } A^2 + B^2 - AB - BA = AB - BA \Rightarrow (A - B)^2 = AB - BA \Rightarrow \\
 \Rightarrow (A - B)^4 = (AB - BA)^2 = O_2 \Rightarrow (A - B)^2 = O_2 \Rightarrow A^2 + B^2 - AB - BA = O_2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow AB - BA = O_2 \Rightarrow AB = BA.
 \end{aligned}$$

b) Cum $(A - B)^2 = O_2$, din teorema Hamilton-Cayley obținem că:

$$(A - B) \cdot \operatorname{Tr}(A - B) = 0 \Rightarrow (\operatorname{Tr}(A - B))^2 = 0 \Rightarrow \operatorname{Tr}A = \operatorname{Tr}B.$$

R.A.8. Fie A, B două matrice de ordinul doi, având elemente numere reale, astfel încât $A^2 + B^2 = AB$ și $BA = O_2$. Să se arate că $AB = O_2$.

Dinu Șerbănescu

Soluție. Dacă $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ este o rădăcină de ordinul trei a unității, atunci avem: $|\det(A + \varepsilon B)|^2 = \det(A^2 + B^2 - BA) - \det(AB - BA) = \det(AB) - \det(AB) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(A + \varepsilon B) = 0 \Rightarrow \det A + \varepsilon (\text{Tr}A \cdot \text{Tr}B - \text{Tr}(AB)) + \varepsilon^2 \det B = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \det A = \text{Tr}A \cdot \text{Tr}B - \text{Tr}(AB) = \det B.$ Din $BA = O_2$ avem că cel puțin una dintre matricele A sau B are determinantul nul, de unde $\det A = \text{Tr}A \cdot \text{Tr}B - \text{Tr}(AB) = \det B = 0.$ Rezultă $A^2 = \text{Tr}A \cdot A$ și $B^2 = \text{Tr}B \cdot B,$ de unde, înlocuind în enunț, obținem $\text{Tr}A \cdot A + \text{Tr}B \cdot B = AB \Rightarrow (\text{Tr}A)^2 + (\text{Tr}B)^2 = \text{Tr}(AB) = \text{Tr}(A) \cdot \text{Tr}(B).$ Dacă $\text{Tr}A \neq 0,$ atunci $1 - \frac{\text{Tr}B}{\text{Tr}A} + \left(\frac{\text{Tr}B}{\text{Tr}A}\right)^2 = 0,$ deci $\frac{\text{Tr}B}{\text{Tr}A}$ este soluție pentru ecuația $1 - x + x^2 = 0,$ deci $\frac{\text{Tr}B}{\text{Tr}A} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$ contradicție.

Astfel: $\text{Tr}A = 0 \Rightarrow \text{Tr}B = 0 \Rightarrow AB = \text{Tr}A \cdot A + \text{Tr}B \cdot B = 0.$

R.A.9. Fie $A, B, C \in M_2(\mathbb{R}).$ Atunci, următoarele afirmații sunt adevărate:

1. Dacă $A^2 = O_2,$ atunci $\text{Tr}(ACA) = 0;$
2. Dacă $C^3 = O_2,$ atunci $C^2 = O_2;$
3. Dacă $A^2 = B^2 = AB = O_2,$ atunci $BA = O_2.$

Sorin Rădulescu și Petruș Alexandrescu

Soluție.

1. Avem $\text{Tr}(ACA) = \text{Tr}(A^2C) = 0.$

2. Dacă λ_1, λ_2 sunt valorile proprii ale matricei $C,$ din $C^3 = O_2$ rezultă $\lambda_1^3 = \lambda_2^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (căci λ_1, λ_2 sunt soluții ale ecuației polinomiale de gradul trei $x^3 = 0$ și $x_1 = x_2 = 0$ este singura soluție). Deoarece C este matrice diagonală, rezultă că $C^2 = O_2.$

3. Raționament asemănător problemei **R.A.5.**

R.A.10. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C}),$ cu proprietatea $A^2 + B^2 = AB.$ Să se arate că:

$$(AB - BA)^2 = O_2.$$

Marian Ionescu

Soluție. Vom face demonstrația pentru $A, B \in M_2(\mathbb{C}).$

Este clar că $\det(A^2 + B^2) = \det(AB).$ Acum, plecând de la relația din enunț, putem scrie: $A^2 + B^2 = AB \Rightarrow A^2 + B^2 - (AB - BA) = BA \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det(A^2 + B^2 - (AB - BA)) &= \det(AB) \Rightarrow \det(A^2 + B^2) + \det(AB - BA) - \\ &- \text{Tr}(A^2 + B^2) \cdot \text{Tr}(AB - BA) + \text{Tr}[(A^2 + B^2)(AB - BA)] = \det(AB) \stackrel{\det(A^2 + B^2) = \det(AB)}{\Rightarrow} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \det(AB - BA) = 0, \text{ deoarece } Tr(AB - BA) = 0, \text{ iar } Tr[(A^2 + B^2)(AB - BA)] = \\ = Tr(A^3B - A^2BA + B^2AB - B^3A) = Tr(A^3B - A^3B) + Tr(B^3A - B^3A) = 0.$$

Acum, din teorema *Hamilton-Cayley*, $(AB - BA)^2 - Tr(AB - BA)(AB - BA) + \det(AB - BA) \cdot I_2 = 0 \Rightarrow (AB - BA)^2 = O_2$.

R.A.11. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ două matrice, astfel încât $AB + BA = O_2$ și $O_2 \notin \{A, B\}$. Arătați că $Tr(A) = Tr(B) = 0$ sau $\det A = \det B = 0$. Găsiți exemple de astfel de matrice, pentru care una dintre condiții să fie satisfăcută, iar cealaltă să nu fie adevărată.

Florin Stănescu

Soluție. Cum $AB + BA = O_2$, obținem că:

$$(A + B)^2 = (A - B)^2 \Rightarrow [\det(A + B)]^2 = [\det(A - B)]^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (\det A + (TrA \cdot TrB - Tr(AB)) + \det B)^2 = \\ = (\det A - (TrA \cdot TrB - Tr(AB)) + \det B)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (TrA \cdot TrB - Tr(AB))(\det A + \det B) = 0.$$

Analog, din $AB + BA = O_2 \Rightarrow \det(A + iB)^2 = \det(A - iB)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\det A - i[TrA \cdot TrB - Tr(AB)] - \det B)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow (\det A + i[TrA \cdot TrB - Tr(AB)] - \det B)^2 = \\ = [TrA \cdot TrB - Tr(AB)](\det A - \det B) = 0.$$

Astfel, am obținut că:

$$\alpha) : (TrA \cdot TrB - Tr(AB))(\det A + \det B) = 0 \text{ și}$$

$$\beta) : (TrA \cdot TrB - Tr(AB))(\det A - \det B) = 0.$$

a. Dacă $Tr(AB) = TrA \cdot TrB$, folosind $AB + BA = O_2$, deci $Tr(AB) = 0$, obținem că $TrA \cdot TrB = 0$. Presupunem că $TrA = 0$. Obținem că:

$$O_2 = TrB \cdot A \stackrel{A \neq O_2}{\Rightarrow} TrB = 0. \text{ Astfel, } Tr(A) = Tr(B) = 0.$$

b. Dacă $\det A + \det B = 0$, din β putem avea că $Tr(AB) = TrA \cdot TrB$, ceea ce

conduce la $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B) = 0$, sau $\det A - \det B = 0$, ceea ce duce la: $\det A = \det B = 0$.

Pentru $\text{Tr}A = \text{Tr}B = 0$, luăm $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AB + BA = O_2$. Se observă că $\det A \neq 0$ și $\det B \neq 0$.

Pentru $\det A = \det B = 0$, luăm $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow AB + BA = O_2$.

Se observă că $\text{Tr}A \neq 0$ și $\text{Tr}B \neq 0$.

R.A.12. Fie $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ și $C = (AB - BA)^2$. Arătați că:

$$C = O_2 \Leftrightarrow \text{Tr}C = O_2.$$

Dorel Miheț

Soluție. „ \Rightarrow ” Dacă $(AB - BA)^2 = O_2$, atunci $\text{Tr}(AB - BA) = 0$.

„ \Leftarrow ” Fie $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ valorile proprii ale matricei $AB - BA$. Este limpede că $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Cum $\text{Tr}(AB - BA)^2 = 0$, atunci $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 0$, de unde obținem $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, iar din relația Hamilton-Cayley rezultă că $(AB - BA)^2 = O_2$.

R.A.13. Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ și $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}A \cdot \text{Tr}B$, atunci arătați că:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \det\left(\frac{1}{k}A + \frac{1}{n-k}B\right) = \frac{\pi^2}{6} \det(A+B).$$

Mihai Opincariu

Soluție. Cum $\text{Tr}\left(\frac{1}{k}A \cdot \frac{1}{n-k}B\right) = \text{Tr}\left(\frac{1}{k}A\right) \cdot \text{Tr}\left(\frac{1}{n-k}B\right)$, atunci:

$$\det\left(\frac{1}{k}A + \frac{1}{n-k}B\right) = \frac{1}{k^2} \det A + \frac{1}{(n-k)^2} \det B, (\forall) k = \overline{1, n-1}, \text{ de unde rezultă că}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \det\left(\frac{1}{k}A + \frac{1}{n-k}B\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k^2} \det A + \frac{1}{(n-k)^2} \det B \right) =$$

$$= [\det A + \det B] \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \right)^{\text{Tr}(AB)=\text{Tr}A \cdot \text{Tr}B} = \frac{\pi^2}{6} \det(A+B).$$

R.A.14. Arătați că $(AB - BA)^2 \cdot C = C \cdot (AB - BA)^2$, $(\forall) A, B, C \in M_2(\mathbb{C})$.

$$(AB - BA)^2 = -\det(AB - BA) \cdot I_2, \text{ deci}$$

$$\begin{aligned} (AB - BA)^2 \cdot C &= -\det(AB - BA) \cdot I_2 \cdot C = C \cdot [-\det(AB - BA) \cdot I_2] = \\ &= (AB - BA)^2 \cdot C, (\forall) A, B, C \in M_2(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

R.A.15. Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, atunci:

$$\text{Tr}(AB)^2 = \text{Tr}(A^2B^2) \Leftrightarrow (AB - BA)^2 = O_2.$$

$$\begin{aligned} \text{Soluție. Putem scrie: } \det(AB - BA) &= \frac{[\text{Tr}(AB - BA)]^2 - \text{Tr}(AB - BA)^2}{2} = \\ &= -\frac{\text{Tr}(AB)^2 + \text{Tr}(BA)^2 - \text{Tr}(AB^2A) - \text{Tr}(BA^2B)}{2} = -\text{Tr}(AB)^2 + \text{Tr}(A^2B^2). \end{aligned}$$

Cum $(AB - BA)^2 = -\det(AB - BA) \cdot I_2$, acum este limpede că:

$$\text{Tr}(AB)^2 = \text{Tr}(A^2B^2) \Leftrightarrow (AB - BA)^2 = O_2.$$

R.A.16. Dacă $A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A^2 + B^2 + C^2) \geq 0$, arătați că are loc inegalitatea:

$$\det(A^2 + B^2 - C^2) + \det(A^2 - B^2 + C^2) + \det(-A^2 + B^2 + C^2) \geq 0.$$

Soluție. În relația $\det(X + Y + Z) + \det X + \det Y + \det Z =$

$$\begin{aligned} &= \det(X + Y) + \det(Y + Z) + \det(Z + Y), (\forall) X, Y, Z \in M_2(\mathbb{C}), \text{ înlocuind } X \text{ cu} \\ &A^2 + B^2 - C^2, Y \text{ cu } A^2 - B^2 + C^2 \text{ și } Z \text{ cu } -A^2 + B^2 + C^2, \text{ obținem că:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\det(A^2 + B^2 - C^2) + \det(A^2 - B^2 + C^2) + \det(-A^2 + B^2 + C^2) = \\ &= 4[\det^2 A + \det^2 B + \det^2 C] \geq 0. \end{aligned}$$

R.A.17. Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, atunci avem:

$$AB + BA = \text{Tr}B \cdot A + \text{Tr}A \cdot B + (\text{Tr}(AB) - \text{Tr}A \cdot \text{Tr}B) \cdot I_2.$$

Demonstrație. Se ia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ și se efectuează calculele.

R.A.18. Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{C})$, arătați că:

$$(AB - BA)^2 = O_2 \Leftrightarrow \det(A^2 - B^2) = (\det A + \det B)^2 - (Tr(AB) - TrA \cdot TrB)^2.$$

Florin Stănescu

Soluție. Putem scrie:

$$\begin{aligned} & (\det A + \det B)^2 - (Tr(AB) - TrA \cdot TrB)^2 = \\ &= \det^2 A + 2 \det(AB) + \det^2 B - (\det(A+B) - \det A - \det B)^2 = \\ &= 2 \det(A+B)(\det A + \det B) - \det^2(A+B) = \\ &= 2 \det(A+B) \cdot \left[\frac{\det(A+B) + \det(A-B)}{2} \right] - \det^2(A+B) = \\ &= \det[(A-B)(A+B)]. \end{aligned}$$

Prin urmare:

$$(AB - BA)^2 = O_2 \Leftrightarrow \det(A^2 - B^2) = \det[(A-B)(A+B)].$$

Cum $\det(A^2 - B^2) = \det[(A-B)(A+B)] - \det(AB - BA)$, obținem că $(AB - BA)^2 = O_2 \Leftrightarrow \det(AB - BA) = 0$, o echivalență adevărată.

R.A.19. Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ și $\det(AB - BA) = 0$, atunci au loc următoarele inegalități:

a) $\det(A^2 - B^2) \leq (\det A + \det B)^2$;

b) $\det(A^2 + B^2) \geq (\det A - \det B)^2$.

Cezar Lupu

Soluție. a) Din problema precedentă obținem identitatea:

$$\det(A^2 - B^2) = (\det A + \det B)^2 - (Tr(AB) - TrA \cdot TrB)^2 - \det(AB - BA),$$

ceea ce implică faptul că:

$$\det(A^2 - B^2) = (\det A + \det B)^2 - (Tr(AB) - TrA \cdot TrB)^2 \leq (\det A + \det B)^2.$$

b) În identitatea anterioară, înlocuind pe B cu iB , obținem că:

$$\det(A^2 + B^2) = (\det A - \det B)^2 + (Tr(AB) - TrA \cdot TrB)^2 + \det(AB - BA),$$

de unde:

$$\det(A^2 + B^2) = (\det A - \det B)^2 + (Tr(AB) - TrA \cdot TrB)^2 \geq (\det A - \det B)^2.$$

Respect pentru oameni și cărți

R.A.20. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și mulțimea

$$C(A) = \left\{ X \in M_3(\mathbb{C}) \mid AX = XA \right\}.$$

- a) Să se arate că, dacă $X \in M_3(\mathbb{C})$, atunci există $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $X = aI_3 + bA + cA^2$.
- b) Să se arate că, dacă $X \in C(A)$ și $X^{2004} = O_3$, atunci $X = O_3$.

Soluție. a) Dacă $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, atunci din $AX = XA$ obținem că $d = h = c$,

$$e = i = a \text{ și } f = g = a, \text{ de unde obținem că } X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = aI_3 + bA + cA^2.$$

b) Dacă $X \in C(A)$ și $X^2 = O_3$, atunci $a^2 + 2bc = b^2 + 2ac = c^2 + 2ab = 0$, deci $a^3 = b^3 = c^3 = -2abc$, de unde $|a| = |b| = |c|$ și $|a|^3 = 2|a|^3 \Rightarrow a = b = c = 0$. Astfel, am arătat că, dacă $X \in C(A)$ și $X^2 = O_3$, atunci $X = O_3$. Este ușor de arătat că, dacă $X \in C(A)$, atunci $X^k \in C(A), (\forall) k \in \mathbb{N}^*$. În final, cum $X^{2004} = O_3 \Rightarrow (X^{1002})^2 = O_3 \Rightarrow X^{1002} = O_3 \Rightarrow X^{501} = O_3 \Rightarrow X^{502} = O_3 \Rightarrow (X^{251})^2 = O_3 \Rightarrow X^{251} = O_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow X^2 = O_3 \Rightarrow X = O_3$.

R.A.21. Fie $A \in M_3(\mathbb{R})$ cu $\det A = 1$. Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

- a) $\det(A^2 - A + I_3) = 0$;
- b) $\det(A + I_3) = 6$ și $\det(A - I_3) = 0$.

Soluție.

„ \Rightarrow ” Fie $f(x) = \det(xI_3 - A) = x^3 + ax^2 + bx - 1$. Cum $\det(A^2 - A + I_3) = 0$, atunci $\det(A - \varepsilon I_3) \cdot \det(A - \bar{\varepsilon} I_3) = 0$, unde ε este rădăcina de ordin trei a unității. Prin urmare, $f(\varepsilon) = f(\bar{\varepsilon}) = 0$, ceea ce implică $a = -2$ și $b = 2$.