FLORIN STĂNESCU

PROBLEME DE CALCUL MATRICEAL

OLIMPIADE, CONCURSURI ȘCOLARE ȘI BACALAUREAT

Cartea Românească
EDUCAȚIONAL

Cuprins

Enunţuri

Capitolul A. Cazuri particulare

A.I. $n = 2$

Probleme rezolvate

R.A.1. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Determinați matricele $X \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât:

$$X^n + X^{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Laurențiu Panaitopol

Soluție. Din enunț avem că $\det X^{n-2} \cdot \det\left(X^2 + I_2\right) = 0$, de unde $\det X = 0$ sau $\det\left(X^2 + I_n\right) = 0$. Dacă $\det\left(X^2 + I_n\right) = 0$, atunci:

$$\det\left(X + iI_2\right) \cdot \det\left(X - iI_2\right) = 0 \Rightarrow \left(\det X + iTrX - 1\right)\left(\det X - iTrX - 1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\det X - 1\right)^2 + \left(TrX\right)^2 = 0 \Rightarrow \det X = 1 \text{ și } TrX = 0 \Rightarrow X^2 + I_2 = O_2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow X^n + X^{n-2} = O_2$, contradicție. Astfel, $\det X = 0$, ceea ce implică, inductiv, că $X^k = (TrX)^{k-1} X, (\forall) k \in \mathbb{N}^*$. De aici:

$$\left[\left(TrX\right)^{n-1} + \left(TrX\right)^{n-3}\right] X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(TrX\right)^n + \left(TrX\right)^{n-2} = 2.$$

Pentru n impar, ultima ecuație are soluția unică $TrX = 1$, ceea ce implică $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Pentru n par, obținem $TrX \in \{-1, 1\}$, ceea ce implică $X = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

R.A.2. Considerăm mulțimea de matrice $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Arătați că, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, mulțimea M conține exact două submulțimi H cu n elemente stabile.

Marcel Țena

Soluție. Se observă că, dacă $XY = O_2, X, Y \in M$, atunci $X = O_2$ sau $Y = O_2$. De asemenea, $XY = YX$, $(\forall) X, Y \in M$. Presupunem că $O_2 \notin H$.

Fie $H = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$. Dacă $X \in H$, atunci $XX_1XX_2...XX_n = X_1X_2...X_n$, de unde rezultă $(X^n - I_2)X_1X_2...X_n = O_2$, deci $X^n = I_2$. Este clar că $\det X = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2 + b^2 = 1$. Punem $a = \cos t, b = \sin t, t \in [0, 2\pi) \Rightarrow X^n = \begin{pmatrix} \cos nt & \sin nt \\ -\sin nt & \cos nt \end{pmatrix} =$
$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow t = \frac{2k\pi}{n}, k = \overline{0, n-1} \Rightarrow H = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t_k & \sin t_k \\ -\sin t_k & \cos t_k \end{pmatrix} \middle| t_k = \frac{2k\pi}{n}, k = \overline{0, n-1} \right\}$.

Dacă $O_2 \in H$, atunci $H' = H \setminus \{O_2\}$ verifică primul caz, iar

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \cos t_k & \sin t_k \\ -\sin t_k & \cos t_k \end{pmatrix} \middle| t_k = \frac{2k\pi}{n-1}, k = \overline{0, n-2} \right\} \cup \{O_2\}.$$

R.A.3. Dacă $X \in M_2(\mathbb{C})$ este o matrice, atunci $\det X = \frac{(TrX)^2 - TrX^2}{2}$.

Soluție. Din teorema *Hamilton-Cayley*, $X^2 - TrX \cdot X + \det X = O_2$, aplicând urma, obținem:

$$TrX^2 - (TrX)^2 + 2\det X = 0 \Rightarrow \det X = \frac{(TrX)^2 - TrX^2}{2}.$$

R.A.4. Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ sunt două matrice și $x \in \mathbb{C}$, atunci avem egalitatea:

$$\det(A + xB) = \det A + (TrA \cdot TrB - Tr(AB)) \cdot x + \det B \cdot x^2.$$

Soluție. Luând $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, obținem:

$\det(A + xB) = \begin{vmatrix} a + xe & b + xf \\ c + xg & d + xh \end{vmatrix} = x^2(eh - gf) + x(ed + ah - bg - cf) + ad - bc =$
$= x^2 \det B + x(TrA \cdot TrB - Tr(AB)) + \det A.$

Consecința 1. Pentru $x = 1$, obținem că:

$$\det(A + B) = \det A + \det B + Tr(A) \cdot Tr(B) - Tr(AB),$$

astfel $\det(A + B) = \det A + \det B \Leftrightarrow Tr(A) \cdot Tr(B) = Tr(AB)$.

Consecința 2. Pentru $x \in \{-1,1\}$, avem că:

$$\det(A+B)-\det(A-B)=2\left[TrA\cdot TrB-Tr(AB)\right],$$

deci $\det(A+B)=\det(A-B) \Leftrightarrow TrA\cdot TrB=Tr(AB)$.

R.A.5. Fie $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AB+BA=O_2$ și $\det(A+B)=0$. Arătați că $TrA=TrB=0$.

G.M.B.

Soluție. Avem $(A-B)^2=A^2+B^2=(A+B)^2$, de unde $\det(A-B)=0$. Cum $AB+BA=O_2$, rezultă că $Tr(AB)=0$. Relațiile $\det(A-B)=0=\det(A+B)$ implică $Tr(AB)=TrA\cdot TrB=0$ și $\det(A+B)=\det A+\det B=0$.

Presupunem că $TrA=0$. Din teorema *Hamilton-Cayley* rezultă:

$$(A+B)^2-Tr(A+B)(A+B)=O_2 \Rightarrow Tr(A+B)=0 \Rightarrow TrB=0.$$

R.A.6. Dacă $A,B\in M_2(\mathbb{R})$, iar $\varepsilon\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ este o rădăcina de ordinul trei a unității, atunci $\left|\det(A+\varepsilon B)\right|^2=\det\left(A^2+B^2-BA\right)-\det(AB-BA)$.

Florin Stănescu, G.M.-B

Soluție. Folosind $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0, \varepsilon\cdot\bar{\varepsilon}=1, \varepsilon+\bar{\varepsilon}=0, \frac{1}{\varepsilon^2}=\varepsilon$, putem scrie:

$$\left|\det(A+\varepsilon B)\right|^2=\det(A+\varepsilon B)\cdot\det\left(A+\bar{\varepsilon}B\right)=\det\left(A^2+B^2+\varepsilon BA+\bar{\varepsilon}AB\right)=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\det\left(\varepsilon\left(A^2+B^2\right)-(1+\varepsilon)BA+AB\right)=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\det\left(\varepsilon\left(A^2+B^2-BA\right)+AB-BA\right)\right)\underset{1}{=}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\Big[\det(AB-BA)+\varepsilon^2\det\left(A^2+B^2-BA\right)+$$

$$+\ \varepsilon\left(Tr\left(A^2+B^2-BA\right)\cdot Tr(AB-BA)-Tr\left[\left(A^2+B^2-BA\right)(AB-BA)\right]\right)\Big]=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\Big[\det(AB-BA)-\varepsilon\left(Tr\left(A^3B-A^2BA+B^2AB-B^3A-BA^2B+(BA)^2\right)\right)+$$

$$+\ \varepsilon^2\det\left(A^2+B^2-BA\right)\Big]=$$

$$=\varepsilon\left(\det(AB-BA)+\varepsilon Tr\left(A^2B^2-(AB)^2\right)+\varepsilon^2\det\left(A^2+B^2-BA\right)\right)=$$

$= \varepsilon \det\left(AB - BA\right) + \varepsilon^2 Tr\left(A^2B^2 - \left(AB\right)^2\right) + \varepsilon^2 \det\left(A^2 + B^2 - BA\right) =$

$= \varepsilon \det\left(AB - BA\right) + \varepsilon^2 \det\left(AB - BA\right) + \det\left(A^2 + B^2 - BA\right) =$

$= \det\left(AB - BA\right)\left(\varepsilon + \varepsilon^2\right) + \det\left(A^2 + B^2 - BA\right) = \det\left(A^2 + B^2 - BA\right) - \det\left(AB - BA\right).$

Este evident că și $\left|\det\left(B + \varepsilon A\right)\right|^2 = \det\left(A^2 + B^2 - AB\right) - \det\left(AB - BA\right).$

R.A.7. Fie $A, B \in M_2\left(\mathbb{R}\right)$ astfel încât $A^2 + B^2 = 2AB.$

a) Arătați că $AB = BA.$

b) Arătați că $TrA = TrB.$

Marian Ionescu

Soluție. Vom face demonstrația pentru $A, B \in M_2\left(\mathbb{C}\right).$

a) Din enunț, avem: $A^2 + B^2 - 2AB = O_2 \Rightarrow 0 = \det\left(A^2 + B^2 - 2AB\right) =$

$= \det\left(A^2 + B^2 - AB - BA - \left(AB - BA\right)\right) = \det\left(A^2 + B^2 - AB - BA\right) +$

$+ \det\left(AB - BA\right) - tr\left(A^2 + B^2 - AB - BA\right) \cdot tr\left(AB - BA\right) +$

$+ tr\left[\left(AB - BA\right)\left(A^2 + B^2 - AB - BA\right)\right] = \det\left(A - B\right)^2 + \det\left(AB - BA\right),$ deoarece $tr\left[\left(AB - BA\right)\left(A^2 + B^2 + AB + BA\right)\right] = 0.$ Tot din enunț obținem că:

$A^2 + B^2 - AB - BA = AB - BA \Rightarrow \left(A - B\right)^2 = AB - BA \Rightarrow \det\left(A - B\right)^2 =$

$= \det\left(AB - BA\right),$ iar din $0 = \det\left(A + B\right)^2 + \det\left(AB - BA\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = 2\det\left(AB - BA\right) \Rightarrow \det\left(AB - BA\right) = 0 \Rightarrow \left(AB - BA\right)^2 = O_2.$

Cum $A^2 + B^2 - AB - BA = AB - BA \Rightarrow \left(A - B\right)^2 = AB - BA \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(A - B\right)^4 = \left(AB - BA\right)^2 = O_2 \Rightarrow \left(A - B\right)^2 = O_2 \Rightarrow A^2 + B^2 - AB - BA = O_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow AB - BA = O_2 \Rightarrow AB = BA.$

b) Cum $\left(A - B\right)^2 = O_2$, din teorema *Hamilton-Cayley* obținem că:

$$\left(A - B\right) \cdot Tr\left(A - B\right) = 0 \Rightarrow \left(Tr\left(A - B\right)\right)^2 = 0 \Rightarrow TrA = TrB.$$

R.A.8. Fie A, B două matrice de ordinul doi, având elemente numere reale, astfel încât $A^2 + B^2 = AB$ și $BA = O_2$. Să se arate că $AB = O_2$.

Dinu Șerbănescu

Soluție. Dacă $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ este o rădăcină de ordinul trei a unității, atunci avem:

$\left|\det\left(A + \varepsilon B\right)\right|^2 = \det\left(A^2 + B^2 - BA\right) - \det\left(AB - BA\right) = \det\left(AB\right) - \det\left(AB\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \det(A+\varepsilon B)=0 \Rightarrow \det A+\varepsilon\left(TrA\cdot TrB-Tr(AB)\right)+\varepsilon^2\det B=0\Rightarrow$

$\Rightarrow \det A=TrA\cdot TrB-Tr(AB)=\det B$. Din $BA=O_2$ avem că cel puțin una dintre matricele A sau B are determinantul nul, de unde $\det A=TrA\cdot TrB-$ $-Tr(AB)=\det B=0$. Rezultă $A^2=TrA\cdot A$ și $B^2=TrB\cdot B$, de unde, înlocuind în enunț, obținem $TrA\cdot A+TrB\cdot B=AB\Rightarrow(TrA)^2+(TrB)^2=Tr(AB)=$ $=Tr(A)\cdot Tr(B)$. Dacă $TrA\neq 0$, atunci $1-\frac{TrB}{TrA}+\left(\frac{TrB}{TrA}\right)^2=0$, deci $\frac{TrB}{TrA}$ este soluție pentru ecuația $1-x+x^2=0$, deci $\frac{TrB}{TrA}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, contradicție. Astfel: $TrA=0\Rightarrow TrB=0\Rightarrow AB=TrA\cdot A+TrB\cdot B=0$.

R.A.9. Fie $A,B,C\in M_2(\mathbb{R})$. Atunci, următoarele afirmații sunt adevărate:

1. Dacă $A^2=O_2$, atunci $Tr(ACA)=0$;

2. Dacă $C^3=O_2$, atunci $C^2=O_2$;

3. Dacă $A^2=B^2=AB=O_2$, atunci $BA=O_2$.

Sorin Rădulescu și *Petruș Alexandrescu*

Soluție.

1. Avem $Tr(ACA)=Tr(A^2C)=0$.

2. Dacă λ_1,λ_2 sunt valorile proprii ale matricei C, din $C^3=O_2$ rezultă $\lambda_1=\lambda_2=0\overset{H.-Cayley}{\Rightarrow}C^2=O_2$.

3. Raționament asemănător problemei **R.A.5.**

R.A.10. Fie $A,B\in M_2(\mathbb{C})$, cu proprietatea $A^2+B^2=AB$. Să se arate că:

$$(AB-BA)^2=O_2.$$

Marian Ionescu

Soluție. Vom face demonstrația pentru $A,B\in M_2(\mathbb{C})$.

Este clar că $\det(A^2+B^2)=\det(AB)$. Acum, plecând de la relația din enunț, putem scrie: $A^2+B^2=AB\Rightarrow A^2+B^2-(AB-BA)=BA\Rightarrow$

$\Rightarrow\det\left(A^2+B^2-(AB-BA)\right)=\det(AB)\Rightarrow\det(A^2+B^2)+\det(AB-BA)-$

$-Tr(A^2+B^2)\cdot Tr(AB-BA)+Tr\left[(A^2+B^2)(AB-BA)\right]=\det(AB)\overset{\det(A^2+B^2)=\det(AB)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \det(AB-BA)=0$, deoarece $Tr(AB-BA)=0$, iar $Tr\left[\left(A^2+B^2\right)(AB-BA)\right]=$
$=Tr\left(A^3B-A^2BA+B^2AB-B^3A\right)=Tr\left(A^3B-A^3B\right)+Tr\left(B^3A-B^3A\right)=0.$

Acum, din teorema *Hamilton-Cayley*, $(AB-BA)^2-Tr(AB-BA)(AB-BA)+$
$+\det(AB-BA)\cdot I_2=0\Rightarrow (AB-BA)^2=O_2$.

R.A.11. Fie $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ două matrice, astfel încât $AB+BA=O_2$ și $O_2\notin\{A,B\}$. Arătați că $Tr(A)=Tr(B)=0$ sau $\det A=\det B=0$. Găsiți exemple de astfel de matrice, pentru care una dintre condiții să fie satisfăcută, iar cealaltă să nu fie adevărată.

Florin Stănescu

Soluție. Cum $AB+BA=O_2$, obținem că:

$$(A+B)^2=(A-B)^2\Rightarrow\left[\det(A+B)\right]^2=\left[\det(A-B)\right]^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\det A+\left(TrA\cdot TrB-Tr(AB)\right)+\det B\right)^2=$$

$$=\left(\det A-\left(TrA\cdot TrB-Tr(AB)\right)+\det B\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(TrA\cdot TrB-Tr(AB)\right)(\det A+\det B)=0.$$

Analog, din $AB+BA=O_2\Rightarrow\det(A+iB)^2=\det(A-iB)^2\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left(\det A-i\left[TrA\cdot TrB-Tr(AB)\right]-\det B\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\det A+i\left[TrA\cdot TrB-Tr(AB)\right]-\det B\right)^2=$$

$$=\left[TrA\cdot TrB-Tr(AB)\right](\det A-\det B)=0.$$

Astfel, am obținut că:

$\alpha):\left(TrA\cdot TrB-Tr(AB)\right)(\det A+\det B)=0$ și

$\beta):\left(TrA\cdot TrB-Tr(AB)\right)(\det A-\det B)=0.$

a. Dacă $Tr(AB)=TrA\cdot TrB$, folosind $AB+BA=O_2$, deci $Tr(AB)=0$, obținem că $TrA\cdot TrB=0$. Presupunem că $TrA=0$. Obținem că:

$O_2=TrB\cdot A\overset{A\neq O_2}{\Rightarrow}TrB=0$. Astfel, $Tr(A)=Tr(B)=0$.

b. Dacă $\det A+\det B=0$, din β putem avea că $Tr(AB)=TrA\cdot TrB$, ceea ce conduce la $Tr(A)=Tr(B)=0$, sau $\det A-\det B=0$, ceea ce duce la: $\det A=\det B=0$.

Pentru $TrA=TrB=0$, luăm $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\Rightarrow AB=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\Rightarrow AB+BA=O_2$. Se observă că $\det A\neq 0$ și $\det B\neq 0$.

Pentru $\det A=\det B=0$, luăm $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1&-1\\-1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow AB+BA=O_2$.

Se observă că $TrA\neq 0$ și $TrB\neq 0$.

R.A.12. Fie $A,B\in M_2(\mathbb{C})$ și $C=(AB-BA)^2$. Arătați că:

$$C=O_2\Leftrightarrow TrC=O_2.$$

Dorel Miheț

Soluție. „$\Rightarrow$” Dacă $(AB-BA)^2=O_2$, atunci $Tr(AB-BA)=0$.

„$\Leftarrow$” Fie $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ valorile proprii ale matricei $AB-BA$. Este limpede că $\lambda_1+\lambda_2=0$. Cum $Tr(AB-BA)^2=0$, atunci $\lambda_1^2+\lambda_2^2=0$, de unde obținem $\lambda_1=\lambda_2=0$, iar din relația *Hamilton-Cayley* rezultă că $(AB-BA)^2=O_2$.

R.A.13. Dacă $A,B\in M_2(\mathbb{R})$ și $Tr(AB)=TrA\cdot TrB$, atunci arătați că:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\det\left(\frac{1}{k}A+\frac{1}{n-k}B\right)=\frac{\pi^2}{6}\det(A+B).$$

Mihai Opincariu

Soluție. Cum $Tr\left(\frac{1}{k}A\cdot\frac{1}{n-k}B\right)=Tr\left(\frac{1}{k}A\right)\cdot Tr\left(\frac{1}{n-k}B\right)$, atunci:

$\det\left(\frac{1}{k}A+\frac{1}{n-k}B\right)=\frac{1}{k^2}\det A+\frac{1}{(n-k)^2}B,(\forall)k=\overline{1,n-1}$, de unde rezultă că

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\det\left(\frac{1}{k}A+\frac{1}{n-k}B\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k^2}\det A+\frac{1}{(n-k)^2}\det B\right)=$$

$$=[\det A+\det B]\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^2}\right)\overset{Tr(AB)=TrA\cdot TrB}{=}\frac{\pi^2}{6}\det(A+B).$$

R.A.14. Arătați că $(AB-BA)^2\cdot C=C\cdot(AB-BA)^2,(\forall)A,B,C\in M_2(\mathbb{C})$.

Soluție. Cum $Tr(AB-BA)=0$, din teorema *Hamilton-Cayley* avem că:

$(AB-BA)^2 = -\det(AB-BA)\cdot I_2$, deci

$(AB-BA)^2\cdot C = -\det(AB-BA)\cdot I_2\cdot C = C\cdot\left[-\det(AB-BA)\cdot I_2\right] =$

$= (AB-BA)^2\cdot C, (\forall) A,B,C\in M_2(\mathbb{C})$.

R.A.15. Dacă $A,B\in M_2(\mathbb{C})$, atunci:

$$Tr(AB)^2 = Tr(A^2B^2) \Leftrightarrow (AB-BA)^2 = O_2.$$

Soluție. Putem scrie: $\det(AB-BA) = \dfrac{\left[Tr(AB-BA)\right]^2 - Tr(AB-BA)^2}{2} =$

$= -\dfrac{Tr(AB)^2 + Tr(BA)^2 - Tr(AB^2A) - Tr(BA^2B)}{2} = -Tr(AB)^2 + Tr(A^2B^2)$.

Cum $(AB-BA)^2 = -\det(AB-BA)\cdot I_2$, acum este limpede că:

$Tr(AB)^2 = Tr(A^2B^2) \Leftrightarrow (AB-BA)^2 = O_2$.

R.A.16. Dacă $A,B,C\in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A^2+B^2+C^2)\geq 0$, arătați că are loc inegalitatea:

$$\det(A^2+B^2-C^2)+\det(A^2-B^2+C^2)+\det(-A^2+B^2+C^2)\geq 0.$$

Soluție. În relația $\det(X+Y+Z)+\det X+\det Y+\det Z =$

$= \det(X+Y)+\det(Y+Z)+\det(Z+Y), (\forall) X,Y,Z\in M_2(\mathbb{C})$, înlocuind X cu $A^2+B^2-C^2$, Y cu $A^2-B^2+C^2$ și Z cu $-A^2+B^2+C^2$, obținem că:

$\det(A^2+B^2-C^2)+\det(A^2-B^2+C^2)+\det(-A^2+B^2+C^2) =$

$= 4\left[\det^2 A+\det^2 B+\det^2 C\right]\geq 0$.

R.A.17. Dacă $A,B\in M_2(\mathbb{C})$, atunci avem:

$$AB+BA = TrB\cdot A + TrA\cdot B + \left(Tr(AB) - TrA\cdot TrB\right)\cdot I_2.$$

Demonstrație. Se ia $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} e & f\\ g & h\end{pmatrix}$ și se efectuează calculele.

R.A.18. Dacă $A,B\in M_2(\mathbb{C})$, arătați că:

$$\left(AB-BA\right)^2=O_2 \Leftrightarrow \det\left(A^2-B^2\right)=\left(\det A+\det B\right)^2-\left(Tr\left(AB\right)-TrA\cdot TrB\right)^2.$$

Florin Stănescu

Soluție. Putem scrie:

$$\left(\det A+\det B\right)^2-\left(Tr\left(AB\right)-TrA\cdot TrB\right)^2=$$

$$=\det^2 A+2\det\left(AB\right)+\det^2 B-\left(\det\left(A+B\right)-\det A-\det B\right)^2=$$

$$=2\det\left(A+B\right)\left(\det A+\det B\right)-\det^2\left(A+B\right)=$$

$$=2\det\left(A+B\right)\cdot\left[\frac{\det\left(A+B\right)+\det\left(A-B\right)}{2}\right]-\det^2\left(A+B\right)=$$

$$=\det\left[\left(A-B\right)\left(A+B\right)\right].$$

Prin urmare:

$$\left(AB-BA\right)^2=O_2 \Leftrightarrow \det\left(A^2-B^2\right)=\det\left[\left(A-B\right)\left(A+B\right)\right].$$

Cum $\det\left(A^2-B^2\right)=\det\left[\left(A-B\right)\left(A+B\right)\right]-\det\left(AB-BA\right)$, obținem că $\left(AB-BA\right)^2=O_2 \Leftrightarrow \det\left(AB-BA\right)=0$, o echivalență adevărată.

R.A.19. Dacă $A,B\in M_2\left(\mathbb{R}\right)$ și $\det\left(AB-BA\right)=0$, atunci au loc următoarele inegalități:

a) $\det\left(A^2-B^2\right)\le\left(\det A+\det B\right)^2$;

b) $\det\left(A^2+B^2\right)\ge\left(\det A-\det B\right)^2$.

Cezar Lupu

Soluție. a) Din problema precedentă obținem identitatea:

$$\det\left(A^2-B^2\right)=\left(\det A+\det B\right)^2-\left(Tr\left(AB\right)-TrA\cdot TrB\right)^2-\det\left(AB-BA\right),$$

ceea ce implică faptul că:

$$\det\left(A^2-B^2\right)=\left(\det A+\det B\right)^2-\left(Tr\left(AB\right)-TrA\cdot TrB\right)^2\le\left(\det A+\det B\right)^2.$$

b) În identitatea anterioară, înlocuind pe B cu iB, obținem că:

$$\det\left(A^2+B^2\right)=\left(\det A-\det B\right)^2+\left(Tr\left(AB\right)-TrA\cdot TrB\right)^2+\det\left(AB-BA\right),$$

de unde:

$$\det\left(A^2+B^2\right)=\left(\det A-\det B\right)^2+\left(Tr\left(AB\right)-TrA\cdot TrB\right)^2\ge\left(\det A-\det B\right)^2.$$

R.A.20. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ și mulțimea

$$C(A)=\{X\in M_3(\mathbb{C})\mid AX=XA\}.$$

a) Să se arate că, dacă $X\in M_3(\mathbb{C})$, atunci există $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $X=aI_3+bA+cA^2$.

b) Să se arate că, dacă $X\in C(A)$ și $X^{2004}=O_3$, atunci $X=O_3$.

Soluție. a) Dacă $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$, atunci din $AX=XA$ obținem că $d=h=c$, $e=i=a$ și $f=g=a$, de unde obținem că $X=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}=aI_3+bA+cA^2$.

b) Dacă $X\in C(A)$ și $X^2=O_3$, atunci $a^2+2bc=b^2+2ac=c^2+2ab=0$, deci $a^3=b^3=c^3=-2abc$, de unde $|a|=|b|=|c|$ și $|a|^3=2|a|^3\Rightarrow a=b=c=0$. Astfel, am arătat că, dacă $X\in C(A)$ și $X^2=O_3$, atunci $X=O_3$. Este ușor de arătat că, dacă $X\in C(A)$, atunci $X^k\in C(A),(\forall)k\in\mathbb{N}^*$. În final, cum $X^{2004}=O_3\Rightarrow\left(X^{1002}\right)^2=O_3\Rightarrow X^{1002}=O_3\Rightarrow X^{501}=O_3\Rightarrow X^{502}=O_3\Rightarrow$
$\Rightarrow\left(X^{251}\right)^2=O_3\Rightarrow X^{251}=O_3\Rightarrow....\Rightarrow X^2=O_3\Rightarrow X=O_3$.

R.A.21. Fie $A\in M_3(\mathbb{R})$ cu $\det A=1$. Arătați că următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $\det\left(A^2-A+I_3\right)=0$;

b) $\det\left(A+I_3\right)=6$ și $\det\left(A-I_3\right)=0$.

Soluție.

„$\Rightarrow$" Fie $f(x)=\det(xI_3-A)=x^3+ax^2+bx-1$. Cum $\det\left(A^2-A+I_3\right)=0$, atunci $\det(A-\varepsilon I_3)\cdot\det\left(A-\overline{\varepsilon}I_3\right)=0$, unde ε este rădăcina de ordin trei a unității. Prin urmare, $f(\varepsilon)=f\left(\overline{\varepsilon}\right)=0$, ceea ce implică $a=-2$ și $b=2$.